# MATEMATIKA – PROFILOVÁ ČÁST MATURITNÍ ZKOUŠKY

Zkouška z matematiky je písemná. Trvá 240 minut. Jedná se o komplexní zkoušku, během níž žáci pracují s informacemi a používají výpočetní techniku.

Očekávané znalosti a dovednosti pro zkoušku (cílové kompetence) jsou rozděleny do následujících pěti hlavních kategorií:

A. Osvojení matematických pojmů a dovedností
B. Matematické modelování
C. Vymezení a efektivní řešení problému
D. Komunikace
E. Užití pomůcek a zdrojů informací

Úlohy jsou komplexní, prolíná se v nich učivo z různých tematických okruhů.

Písemná práce obsahuje celkem čtyři úlohy, dvě povinné a dvě volitelné. Obsah testu odpovídá obsahu matematiky a dvouletého matematického semináře dle ŠVP GV GT.

Žáci dostanou tištěné zadání a řešení zapisují do formulářů.

Tematické okruhy jsou:

1. Závislosti a funkční vztahy
    - 1.1. Elementární funkce a jejich vlastnosti (funkce lineární, kvadratické, mocninné, lineární lomené, exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické)
        - 1.1.1. Vlastnosti elementárních funkcí, definice a důkazy (graf, definiční obor, obor hodnot, parita, monotónnost, extrémy a omezenost, limity ve vlastních i nevlastních bodech, funkce inverzní)
        - 1.1.2. Grafy elementárních funkcí s absolutní hodnotou a funkcí signum
        - 1.1.3. Využití grafu při řešení rovnic a nerovnic v oboru reálných čísel, grafické znázornění řešení nerovnic
    - 1.2. Posloupnosti
        - 1.2.1. Určení posloupnosti (vztah pro n-tý člen, rekurentní vzorec, důkazy pomocí matematické indukce, grafy posloupností)
        - 1.2.2. Vlastnosti posloupností (definiční obor, obor hodnot, monotónnost, omezenost, extrémy, limita)
        - 1.2.3. Užití aritmetické a geometrické posloupnosti v úlohách z praxe
    - 1.3. Infinitezimální počet
        - 1.3.1. Průběh funkce (vyšetření vlastností funkce a náčrt jejího grafu)
        - 1.3.2. Derivace funkce (explicitní a implicitní vyjádření)
        - 1.3.3. Extrémy funkce (aplikace vět o extrémech ve slovních úlohách)
        - 1.3.4. Primitivní funkce a neurčitý integrál
        - 1.3.5. Určitý integrál (obsah rovinného obrazce, délka křivky, objem rotačního tělesa, fyzikální aplikace)
2. Číslo a proměnná
    - 2.1. Rovnice a nerovnice
        - 2.1.1. Rovnice a nerovnice v oboru reálných a komplexních čísel (lineární, kvadratické, exponenciální, logaritmické, goniometrické, iracionální, s absolutní hodnotou)
        - 2.1.2. Rovnice, nerovnice a soustavy rovnic s parametry (lineární, kvadratické, iracionální, exponenciální, logaritmické, s absolutní hodnotou)
        - 2.1.3. Rovnice, kde jedna strana je zadána ve tvaru řady
3. Argumentace a ověřování
    - 3.1. Množiny a výroky (operace s množinami, složené výroky, zápis výroků a množin)
    - 3.2. Důkazy vět (důkaz přímý, sporem, existenční, matematická indukce)
    - 3.3. Tautologie, ověřování správnosti úsudku
4. Geometrie
    - 4.1. Geometrie v rovině
        - 4.1.1. Geometrický význam absolutní hodnoty v oboru reálných a komplexních čísel
        - 4.1.2. Obrazy komplexních čísel v Gaussově rovině
        - 4.1.3. Geometrická místa bodů v rovině

- 4.1.4. Kuželosečky (analytická vyjádření kuželoseček, rovnice tečen ke kuželosečce, nákres křivek, diskuze polohy přímky a kuželosečky)
- 4.1.5. Trigonometrie (sinová a kosinová věta, trigonometrie obecného trojúhelníku)
- 4.1.6. Shodná zobrazení v rovině (užití v úlohách)
- 4.1.7. Podobnost a stejnolehlost (užití v úlohách)
- 4.1.8. Obsah rovinného obrazce užitím určitého integrálu
- 4.1.9. Obsah a obvod rovnoběžníku, trojúhelníku a dalších rovinných obrazců

4.2. Geometrie v prostoru

- 4.2.1. Úlohy ze stereometrie (objemy a povrchy těles, rovinné řezy hranolu a jehlanu, obsahy řezů)
- 4.2.2. Objem rotačního tělesa užitím určitého integrálu
- 4.2.3. Metrické a polohové úlohy v prostoru (vzdálenosti, odchylky, vzájemná poloha přímek a rovin)

5. Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

- 5.1.1. Kombinatorika (kombinatorické úlohy, Pascalův trojúhelník, binomická věta)
- 5.1.2. Pravděpodobnost (náhodný jev, pravděpodobnost průniku a sjednocení jevů, nezávislé jevy, binomické rozdělení)
- 5.1.3. Práce s daty (analýza a zpracování dat, charakteristiky statistického souboru, grafické znázornění rozdělení četností)

Povolené pomůcky:

- matematické portfolio žáka (vlastní výpisky, sešity, seminární práce, učebnice, sbírky)
- kapesní kalkulátor (bez omezení druhu)
- matematické tabulky (vlastní, různá nakladatelství)
- školní PC s přístupem na vzdálenou plochu, bez připojení k internetu
- vlastní notebook bez připojení k internetu
- šablona pro kreslení elementárních funkcí

Nutné pomůcky:

- rýsovací a psací potřeby

**DŮLEŽITÉ UPOZORNĚNÍ!**

- Technická závada na vlastních zařízeních žáků nebude během zkoušky řešena. Pokud se objeví technický problém na školním zařízení, učitel zavolá správce sítě.
- **Během zkoušky není dovoleno používat mobilní telefon a komunikační programy (Skype, Outlook apod.)! Porušení zákazu povede k předčasnému ukončení zkoušky.**
- Během zkoušky je dovoleno odcházet na nezbytně nutnou dobu na WC. Není povoleno pohybovat se v jiných prostorách školy.

## STRUKTURA PÍSEMNÉ PRÁCE

*Práce bude obsahovat 4 úlohy s tématy vybranými z výše uvedených okruhů.*

*První dvě úlohy budou povinné, další 2 úlohy volitelné. Student si zvolí právě jednu ze dvou variant zadání.*

*U většiny úloh bude vyžadován postup řešení,* ***je nutné pečlivě číst zadání!***

*Zadání úloh bude koncipováno jako složitější matematický problém zasahující do více tematických okruhů.*

## UKÁZKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

**Úlohy jsou vhodné k procvičení.**

### Úloha č. 1 – vlastnosti funkcí

$Je\ dána\ funkce\ f{:}\,y = (x-2)^2 \cdot |x-5|.$

A. Vyšetřete průběh funkce a načrtněte její graf (v ortonormálním systému, nejméně v uzavřeném intervalu od 0,5 do 6, s nakreslenými tečnami v inflexních bodech).

B. Zapište do tabulky extrémy funkce v intervalu $\langle -2; 6\rangle$:

| lokální minima | | lokální maxima | |
|---|---|---|---|
| hodnoty: | v bodech: | hodnoty: | v bodech: |
| globální minima | | globální maxima | |
| hodnoty: | v bodech: | hodnoty: | v bodech: |

C. Vypočítejte obsah rovinného obrazce, který vymezuje graf funkce f a osa x v intervalu od nuly do dvou (v $cm^2$, zohledněte Vaše užité měřítko při kreslení grafu).

D. Vyřešte parametrickou rovnici s reálným parametrem p a reálnou proměnnou x: $(x-2)^2 \cdot |x-5| = p$. Řešení zapište do tabulky (počet řádků si přizpůsobte):

| parametr p | počet kořenů rovnice |
|---|---|
| | |

### Úloha č. 2 – rovnice a nerovnice

Vyřešte rovnice a nerovnice v uvedeném oboru proměnných:

A. $(z-3)^2 + (\bar{z}+i)^2 = 4 \wedge z \in C$
B. $\sqrt[3]{z^4} - 3\sqrt[3]{z^2} = 54 \wedge z \in C$
C. $log_2[2 - log_3(x+2)] \leq 1 \wedge x \in R$
D. $3 \cdot 2^x + 4^x + 2 \leq 20 \wedge x \in R$

### Úloha č. 3 – je volitelná; studenti řeší právě jednu z variant 3A a 3B

**Úloha 3A – extrémy funkce**

Uprostřed nad kruhovou deskou stolu poloměru jeden metr je zavěšený světelný zdroj. Vypočítejte, do jaké výšky je ho třeba umístit, aby osvětlení okraje stolu bylo co největší.

Vztah pro osvětlení E je:

$E = \frac{I}{r^2} \cdot cos \propto$; I udává svítivost, r vzdálenost zdroje od místa osvětlení, čili od okraje stolu

a úhel $\propto$ odchylku mezi směrem dopadajících paprsků na osvětlenou plochu a normálou dané plochy.

Určete potom číselnou hodnotu osvětlení (v luxech) pro zdroj světla o svítivosti 150 kandel za výše uvedených podmínek.

**Úloha 3B – objemy těles**

Určete poměr objemů $\frac{V_{T_1}}{V_{T_2}}$ $těles\ T_1 a\ T_2.$

Těleso $T_1$: rotační komolý kužel, jehož strana **s** délky 24 cm má od roviny podstavy odchylku $\boldsymbol{\alpha}$=60 stupňů; poloměry podstav měří 17 cm a 5 cm.

Těleso $T_2$: vznikne otáčením obrazce omezeného křivkami $k_1$ a $k_2$ o rovnicích

$k_1{:}\,\mathrm{y} = \cos(\mathrm{x})$ a $k_2{:}\,\mathrm{y} = -1$ kolem přímky $\mathrm{p}{:}\,\mathrm{y} = -1$ pro $\mathrm{x} \in \langle -\pi; \pi\rangle$

v kartézské soustavě souřadnic, kde jednotka měří 1 cm.

**Úloha č. 4 – je volitelná; studenti řeší právě jednu z variant 4A a 4B**

**Úloha 4A – kuželosečky**

*Je dána hyperbola* $H: 16x^2 - 25y^2 = 400.$

A. Načrtněte hyperbolu v kartézské soustavě souřadnic. Vypište její charakteristiky (hlavní poloosa a, vedlejší poloosa b, excentricita e, souřadnice ohnisek).
B. Napište rovnice jejích asymptot a určete odchylku těchto přímek.
C. Napište rovnici tečny hyperboly v bodě $T_1$, jehož x-ová souřadnice je rovna pěti. Tečnu označte $t_1$.
D. Napište rovnici tečny hyperboly v bodě $T_2$, jehož x-ová souřadnice je rovna deseti a y-ová souřadnice je kladná. Tečnu označte $t_2$.
E. Určete odchylku tečen $t_1$ a $t_2$.
F. Vypočítejte obsah trojúhelníku omezeného asymptotami a tečnou $t_2$.

**Úloha 4B – řady**

Strany čtverce rozdělíme v poměru 3:4 tak, aby u každého vrcholu byl jeden díl větší a jeden menší. Spojením dělících bodů vznikne opět čtverec. Stejným způsobem vepíšeme do něho další čtverec a postup opakujeme. Určete součet O obvodů všech čtverců a součet S obsahů všech čtverců (včetně původního).

Dále vyřešte goniometrickou rovnici:

$$\frac{1}{2^0}\sin^0 x + \frac{2}{2^1}\sin^1 x + \frac{3}{2^2}\sin^2 x + \frac{4}{2^3}\sin^3 x + \frac{5}{2^4}\sin^4 x + \frac{6}{2^5}\sin^5 x + \cdots = \frac{16}{9}$$

Návod: sečtěte řady postupně úpravou do trojúhelníkového tvaru:

$$\frac{1}{2^0}\sin^0 x + \frac{1}{2^1}\sin^1 x + \frac{1}{2^2}\sin^2 x + \frac{1}{2^3}\sin^3 x + \frac{1}{2^4}\sin^4 x + \frac{1}{2^5}\sin^5 x + \cdots = s_1$$

$$\frac{1}{2^1}\sin^1 x + \frac{1}{2^2}\sin^2 x + \frac{1}{2^3}\sin^3 x + \frac{1}{2^4}\sin^4 x + \frac{1}{2^5}\sin^5 x + \cdots = s_2$$

$$\frac{1}{2^2}\sin^2 x + \frac{1}{2^3}\sin^3 x + \frac{1}{2^4}\sin^4 x + \frac{1}{2^5}\sin^5 x + \cdots = s_3$$

## DALŠÍ ÚLOHY PRO PROCVIČOVÁNÍ

**Úloha 5 - trigonometrie**

1) V trojúhelníku ABC označme V střed jeho kružnice vepsané. Vyjádřete délku úsečky AV pomocí stran a goniometrických funkcí vnitřních úhlů trojúhelníka ABC.
Potom vyčíslete pro a = 5 m, b = 7m, c = 8m.

2) Výšku budovy vidíme z jisté vzdálenosti ve výškovém úhlu 60°. Přiblížíme-li se o 5 metrů blíže k budově, vidíme její výšku již pod výškovým úhlem 70°. Jak je budova vysoká?

3) V libovolném trojúhelníku se stranami a, b a jejich protějšími úhly α, β platí:
$\frac{a-b}{a+b} = \frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}$ (Tangentová věta). Tvrzení dokažte za užití Sínové věty pro strany a, b.

**Úloha 6 – zobrazení v rovině, Euklidovy věty, Pythagorova věta**

1) Sestrojte libovolný nerovnoramenný ostroúhlý trojúhelník, jehož základna AB měří 8 cm a výška k ní 6 cm. Trojúhelníku vepište čtverec PQRS tak, že vrcholy P, Q leží na straně AB, a vrcholy R, S po řadě na stranách BC, CA. Zapište stručně konstrukci a vypočtěte délku strany sestrojeného čtverce.

2) Pata výšky k přeponě pravoúhlého trojúhelníku dělí přeponu v poměru 3:7, kratší odvěsna měří 6 cm. Vypočtěte velikost této výšky a délky zbývajících stran trojúhelníku. Trojúhelník sestrojte.

3) Jsou dány různoběžné přímky a, b a úsečka délky **u.** Sestrojte všechny kružnice s poloměrem r = 2 cm. Které mají střed na přímce b a přímka a je jejich sečnou, která vytíná na kružnicích tětivu délky **u**. Proveďte diskusi počtu řešení podle parametru **u**.

**Úloha 7– kombinatorika, pravděpodobnost**

a) Řešte nerovnici:

$\binom{8}{x-1}+\binom{7}{9-x} \leq \binom{7}{x}$

b) Mezi 5 dětí máme rozdělit 12 stejných (nerozlišitelných) bonbónů a 10 různých hraček. Kolika způsoby to lze provést tak, aby:

- Každé dítě dostalo aspoň jeden bonbón
- Každé dítě dostalo aspoň jednu hračku
- Každé dítě dostalo aspoň jeden bonbón a také aspoň jednu hračku

c) Fotbalový hráč promění pokutový kop s pravděpodobností 0,83. Vypočtěte, s jakou pravděpodobností tento hráč z deseti kopů promění aspoň sedm.

d) V osudí je devět míčků, právě jeden z nich je modrý a právě jeden červený. Náhodně vylosujeme čtyři míčky. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude modrý nebo červený?

**Úloha 8 – kuželosečky, komplexní čísla**

1) Nakreslete množinu bodů M v Gaussově rovině komplexních čísel, napište její analytické vyjádření v kartézské soustavě souřadnic. $M = \{z \in C; |z - 3 - 5i| + |z - 9 - 5i| = 10\}$
2) Identifikujte množinu bodů K v Gaussově rovině komplexních čísel (doporučení – využijte program Geogebra). $K = \{z \in C; 2 \cdot |z - 1 - 2i| = |z - 4 - 6i|\}$